1. Montrer que $e_{k+1} = Be_k$ et en déduire que la suite (x_k) converge vers $\bar{x}$.
2. Montrer que $x_{k+1} = x_k - r_k$, $r_k = Ae_k$ et $r_{k+1} = Br_k$.
3. Montrer que $x_{k+1} = x_0 - (I + B + B^2 + \cdots + B^k)r_0$ et en déduire : $\bar{x} = x_0 - A^{-1}r_0$.
4. Montrer que $||A^{-1}|| \leq \frac{1}{1 - ||B||}$. En déduire la majoration d'erreur :

$$||e_k|| \leq \frac{||B||^k}{1 - ||B||} ||r_0||$$

Ex-4 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

R.Q. : obtenue en discrétisant le problème $-u''(x) = f(x)$ avec les conditions initiales $u(0)$ et $u(1)$ données et pour $0 < x < 1$. On note $h = \frac{1}{n+1}$

1. Calculer les valeurs propres de la matrice de Jacobi J ansi que le rayon spectrale. En déduire $\rho(L_1)$ et $\rho(L_{\omega_0})$.
2. Quand h est petit, Ecrire les rayons spectrales sous la forme $1 - q(h)$ et évaluer les parties principales correspondantes de $q(h)$ lorsque h tend vers zéro.

Ex-5 : Soit $A = (a_{ij})$ une matrice d'ordre n strictement diagonalement dominante :

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad 1 \leq i \leq n$$

1. Démontrer que la méthode de Jacobi converge.
2. Démontrer que la méthode de Gauss-Seidel converge.

Ex-6 : Etant donné une matrice symétrique définie positive décomposée sous la forme $A = (D - E - F) \in M_n(\mathbb{R})$, on étudie une méthode itérative de résolution du système $Au = b$.

1. Etant donné un vecteur u_0 arbitraire, on définie la suite (u_k) par

$$(D - E)u_{k+\frac{1}{2}} = Fu_k + b$$
$$(D - F)u_{k+1} = Eu_{k+\frac{1}{2}} + b$$

Le vecteur b étant fixé. Ecrire le vecteur u_{k+1} sous la forme

$$u_{k+1} = Bu_k + c$$

en explicitant la matrice B et le vecteur c.